20/12/2018

Θέματα Ιανουαρίου 2018

Θέμα 1º Βρείτε $b \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $(2b+1, 5b+4) = 3$

Λύση $(2b+1, 5b+4) = 3 \Rightarrow 3 / 2b+1$ και $3/5b+4$ $\Rightarrow$

$2b+1 \equiv 0 \mod 3$

$\Rightarrow \begin{cases} 2b \equiv -1 \mod 3 \\ 5b \equiv -4 \mod 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \equiv 1 \mod 3 \Rightarrow 3 / b-1 \Rightarrow b-1 = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow b = 3k+1, k \in \mathbb{Z}$

$(2b+1, 5b+4) = (2(3k+1)+1, 5(3k+1)+4) = (6k+3, 15k+9) =$

$= (3(2k+1), 3(5k+3)) = 3(2k+1, 5k+3)$ (*)

Θέλω να δείξω ότι: $(2k+1, 5k+3) = 1$

Έστω $(2k+1, 5k+3) = d \Rightarrow \begin{cases} d / 2k+1 \\ d / 5k+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d / 10k+5 \\ d / 10k+6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} d / (10k+5) - (10k+6) \Rightarrow d / -1 \Rightarrow d / 1 \end{cases}$

Όμως $d/1$, $1/d$ $\Rightarrow d = 1$

Η (*) γίνεται $3(2k+1, 5k+3) = 3 \cdot 1 = 3$

Θέμα 3º (i) Δείξτε ότι ο 127 είναι πρώτος

(ii) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $123!$ με το 127.

Λύση! (i) Έστω ότι το 127 δεν είναι πρώτος. Τότε υπάρχει ένας πρώτος διαιρέτης μικρότερος του $\sqrt{127}$

$\underset{11^2}{121} < 127 < \underset{12^2}{144}$

Άρα $\sqrt{127} \simeq 11,\ldots$

Οι πρώτοι διαιρέτες μέχρι το 11 είναι: 2, 3, 5, 7, 11

$127 = 2\cdot 63 + 1 \Rightarrow 2 \nmid 127$

$127 = 3\cdot 42 + 1 \Rightarrow 3 \nmid 127$

$127 = 5\cdot 25 + 2 \Rightarrow 5 \nmid 127$

$127 = 7\cdot 18 + 1 \Rightarrow 7 \nmid 127$

$127 = 11\cdot 11 + 6 \Rightarrow 11 \nmid 127$ Άτοπο! Άρα το 127 είναι πρώτος αριθμός.

(ii) $193! \equiv (?) \bmod 127$

Εφαρμόζουμε Θεώρημα Wilson για $p = 127$

Τότε $126! \equiv -1 \bmod 127$

$126! = 123!\, 124 \cdot 125 \cdot 126$

Άρα: $123! \cdot 124 \cdot 125 \cdot 126 \equiv -1 \bmod 127$

$123!\, (-3)(-2)(-1) \equiv -1 \bmod 127$

$123!\, (-6) \equiv -1 \bmod 127$

$6 \cdot 123! \equiv 1 \bmod 127$

Θεώρ. Wilson
p: πρώτος
$(p-1)! \equiv -1 \bmod p$

Θέτουμε $x \equiv 123! \bmod 127$, $0 \le x < 127$

Άρα $6x \equiv 1 \bmod 127$

$x \equiv 106 \bmod 127$

$6x \equiv 1 \bmod 127 \Rightarrow$
$6x \equiv -126 \bmod 127 \Rightarrow$
$127 / 6x + 126$
$x \equiv -21 \bmod 127 \Rightarrow$
$x \equiv 106 \bmod 127$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 106

Θέμα 7ο Έστω $a, b \in \mathbb{N}$ και $(a,b) = 1$. Τότε να δειχθεί ότι:

$(a-b,\ a^{2017} \cdot b^{2018}) = 1$

Λύση Έστω ότι $(a-b,\ a^{2017} \cdot b^{2018}) = d$. Υποθέτουμε ότι $d > 1$. Τότε υπάρχει p: πρώτος με $p \mid d$

a θετικός ακέραιος
p: πρώτος
$(a,p) = 1$ ή $(a,p) = p$
$a \mid \text{μκδ}(a,p) \Rightarrow a \mid p$

Επιπλέον $d \mid a-b$

$d \mid a^{2017} \cdot b^{2018}$

Άρα $p \mid a-b$

$p \mid a^{2017} \cdot b^{2018}$

$a^{2017} \cdot b^{2018} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{2017\ \text{φορές}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{2018\ \text{φορές}} \Rightarrow p \mid a \cdots a$ ή $p \mid b \cdots b \Rightarrow$

$\Rightarrow p \mid a$ ή $p \mid b$

1η περίπτωση: $p \mid a-b \Rightarrow p \mid a-b-a \Rightarrow p \mid -b \Rightarrow p \mid b$

$p \mid a$

Εφόσον $p|a \Rightarrow p|(a,b)=1 \Rightarrow p|1$ Άτοπο γιατί p πρώτος
$p|b$ και κάθε πρώτος είναι >1

2η περίπτωση: $p|a-b \Rightarrow p|b-a-b \Rightarrow p|-a \Rightarrow p|a$
$p|b$

Εφόσον $p|a$ $\Rightarrow p|(a,b)=1 \Rightarrow p|1$ άτοπο!
$p|b$

Συνεπώς $(a-b, a^{2017} \cdot b^{2018}) = 1$

Θέμα 5ο Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του 17^{290} με το 65 [Όταν έχω δυνάμεις μάλλον πάω σε θεώρημα Euler]

Λύση $17^{290} \equiv x \bmod 65$, $0 \le x < 65$

$65 = 5 \cdot 13$

$\phi(65) = \phi(5 \cdot 13) = 4 \cdot 12 = 48$

Εφόσον $(17,65)=1 \overset{Euler}{\Rightarrow} 17^{\phi(65)} \equiv 1 \bmod 65 \Rightarrow 17^{48} \equiv 1 \bmod 65$

$290 = 48 \cdot 6 + 2$

$$
\begin{aligned}
17^{290} = (17^{48})^6 \cdot 17^2 &\equiv 1^6 \cdot 17^2 \bmod 65 \\
&\equiv 17^2 \bmod 65 \\
&\equiv 289 \bmod 65 \\
&\equiv 29 \bmod 65
\end{aligned}
$$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του 17^{290} με το 65 είναι το 29.

Θέμα 8º Βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της Διοφαντικής εξίσωσης $48x - 87y = 111$ (1) (ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις).

Λύση: Για να δειχθεί ότι η (1) έχει ακέραιες λύσεις αρκεί να δειχθεί ότι $\text{μκδ}(48,87) / 111$

$87 = 1 \cdot 48 + 39$

$48 = 1 \cdot 39 + 9$

$39 = 4 \cdot 9 + 3$

$9 = 3 \cdot 3 + 0$

Άρα $(48,87) = 3$

$3 = 39 - 4 \cdot 9 = 39 - 4(48 - 39)$
$= 5 \cdot 39 - 4 \cdot 48$
$= 5(87 - 48) - 4 \cdot 48$
$= 5 \cdot 87 - 9 \cdot 48$
$3 = 5 \cdot 87 - 9 \cdot 48$

$\text{μκδ}(48,87) = 3 / 111$

$111 = 3 \cdot 37$

Άρα $3 \cdot 37 = 5 \cdot 37 \cdot 87 - 9 \cdot 37 \cdot 48$

$111 = 48(-9 \cdot 37) - 87(-5 \cdot 37)$

Άρα $x_0 = -9 \cdot 37$ και $y_0 = -5 \cdot 37$

$x = x_0 - \frac{b}{d} t \Rightarrow x = -9 \cdot 37 - \frac{(-87)}{3} t \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -333 + 29t, \ t \in \mathbb{Z}$

$y = y_0 + \frac{a}{d} t \Rightarrow y = -5 \cdot 37 + \frac{48}{3} t \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -185 + 16t, \ t \in \mathbb{Z}$

Θέμα 2ο Βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό μεγαλύτερο του 1000 που είναι λύση του συστήματος γραμμικών ισοτιμιών : (Σ) $\begin{cases} 9x \equiv 11 \bmod 17 \\ 4x \equiv -2 \bmod 22 \\ x \equiv 31 \bmod 23 \end{cases}$

Λύση
$\text{μκδ}(9,17) \mid (11)$
$\text{μκδ}(4,22) \mid (-2)$
$\text{μκδ}(1,23) \mid (31)$ Άρα το (Σ) έχει λύση

$$\begin{cases} 9x \equiv 11 \bmod 17 \\ 4x \equiv -2 \bmod 22 \\ x \equiv 31 \bmod 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \cdot 9x \equiv 99 \bmod 17 \\ 2x \equiv -1 \bmod 11 \\ x \equiv 8 \bmod 23 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 18x \equiv 99 \bmod 17 \\ x \equiv 5 \bmod 11 \\ x \equiv 8 \bmod 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 14 \bmod 17 \\ x \equiv 5 \bmod 11 \\ x \equiv 8 \bmod 23 \end{cases}$$

Όταν διαιρώ μια ισοτιμία κατά μέλη, διαιρώ το αυτό που έχω στο μόδιο

$M_1 b_1 \equiv 1 \bmod m_1$
$11 \cdot 23 b_1 \equiv 1 \bmod 17$
$(-6)(6) b_1 \equiv 1 \bmod 17$
$-36 b_1 \equiv 1 \bmod 17$
$-2 b_1 \equiv 1 \bmod 17$
$b_1 \equiv 8 \bmod 17$

$M_2 b_2 \equiv 1 \bmod m_2$
$17 \cdot 23 b_2 \equiv 1 \bmod 11$
$6 \cdot 1 \cdot b_2 \equiv 1 \bmod 11$
$6 b_2 \equiv 1 \bmod 11$
$b_2 \equiv 2 \bmod 11$

$M_3 b_3 \equiv 1 \bmod m_3$
$17 \cdot 11 b_3 \equiv 1 \bmod 23$
$187 b_3 \equiv 1 \bmod 23$
$3 b_3 \equiv 1 \bmod 23$
$b_3 \equiv 8 \bmod 23$

$M = 17 \cdot 11 \cdot 23$

a_i	M_i	b_i
14	$11 \cdot 23$	8
5	$17 \cdot 23$	2
8	$11 \cdot 17$	8

Συνεπώς,

$x \equiv 14 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 8 + 5 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 2 + 8 \cdot 17 \cdot 11 \cdot 8 \bmod 17 \cdot 11 \cdot 23$

$\equiv (17-3) \cdot 11 \cdot 23 \cdot 8 + (11-1) \cdot 17 \cdot 23 + (69-5) \cdot 11 \cdot 17 \bmod 11 \cdot 17 \cdot 23$

$\equiv \cancel{8 \cdot 17 \cdot 11 \cdot 23} - 24 \cdot 11 \cdot 23 + \cancel{11 \cdot 17 \cdot 23} - 17 \cdot 23 + \cancel{\overset{3 \cdot 23}{69} \cdot 11 \cdot 17} - 5 \cdot 11 \cdot 17 \bmod 11 \cdot 17 \cdot 23$

$\equiv -24 \cdot 11 \cdot 23 - 17 \cdot 23 - 5 \cdot 11 \cdot 17 \bmod 11 \cdot 17 \cdot 23$

$\equiv (10 - 2 \cdot 17) \cdot 11 \cdot 23 - 17 \cdot 23 - 5 \cdot 11 \cdot 17 \bmod 11 \cdot 17 \cdot 23$

$\equiv 10 \cdot 11 \cdot 23 - \cancel{2 \cdot 17 \cdot 11 \cdot 23} - 17 \cdot 23 - 5 \cdot 11 \cdot 17 \bmod 11 \cdot 17 \cdot 23$

$\equiv 2530 - 391 - 935 \bmod 11 \cdot 17 \cdot 23$

$\equiv 1204 \bmod 11 \cdot 17 \cdot 23$

Άρα ο μικρότερος φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1000 είναι ο 1204.

Άσκηση : Βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό μεγαλύτερο του 4000 που είναι λύση του (Σ) :

$$\begin{cases} x \equiv -3 \bmod 11 \\ -2x \equiv 7 \bmod 23 \\ 6x \equiv 15 \bmod 45 \end{cases}$$